بسم الله الرّحمن الرّحیم

انجمن علمی نقشه برداری سیرجان ارائه می دهد :

بررسی مسائل فصل دوم کتاب تعدیل و سرشکنی خطاهای مشاهدات نقشه برداری

تالیف مهندس داوود جباری سابق

تهیه و تنظیم :

۱- رضا حکیمی reza.elson@gmail.com

۲- عبّاس بهزادی کندازی abk0136845@yahoo.com

دانشجویان رشته مهندسی نقشه برداری دانشگاه شهید باهنر کرمان (دانشکده مهندسی سیرجان)

مقدمه :

اصل مورد استفاده در سرشکنی همواره یک اصل ثابت می باشد و عبارت است از اینکه مجموع مربعات باقی مانده ها می نیمم شود . این جمله را با ذکر یک مثال شرح می دهیم :

فرض کنید که یک زاویه را ۳ بار قرائت کرده و مقادیر a ، b و c را بدست آورده ایم . بدیهی است که هرگز نمی توانیم ۳ عدد مختلف را به یک زاویه انتساب دهیم از طرفی هم نمی دانیم که کدام عدد واقعا درست می باشد . مجبوریم از روشی استفاده کنیم که نهایتا یک عدد را به زاویه مذکور نسبت دهیم . ثابت می شود بهترین مقدار ممکن مقداری است که اگر مثلا این مقدار را d بنامیم عبارت زیر می نیمم شود .

$$(d-a)^2+(d-b)^2+(d-c)^2$$

و این عبارت همان مجموع مربعات باقی مانده ها می باشد که از آن صحبت به میان آوردیم . در واقع منظور از باقی مانده ها اختلاف هر یک از مقادیر حاصل از اندازه گیری نسبت به مقدار واقعی کمیت مورد اندازه گیری می باشد .

در حل تمامی سوالات اصل فوق استفاده شده و نتیجه از این طریق بدست می آید . اگر در سرشکنی از روش های پارامتریک ، شرط ، ترکیبی و ... صحبت می کنیم ، این روش ها در واقع همان اصل کمترین مربعات هستند که فرموله شده و این روش ها به وجود آمده اند . در ریاضیات نیز از این اصل استفاده می شود و می دانیم که میانگین خود یک روش ساده کمترین مربعات می باشد یعنی میانگین گیری خود از اصل کمترین مربعات بدست آمده است .

سوال ۱ : می دانیم میانگین خود یک روش ساده کمترین مربعات است پس در این سوال اگر از ۳ مقدار معرفی شده برای زاویه میانگین گیری کنیم ، طبق اصل کمترین مربعات بهترین مقدار (برآورد) برای زاویه بدست می آید .

$$\alpha = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

اما در این سوال هم می توان از لحاظ تئوری و هم از لحاظ عملی برآورد حاصل از رابطه فوق را نقد کرد . از نظر تئوری ما از مقادیر انحراف معیارها هیچ استفاده ای نکرده ایم و از نظر عملی هم طبق این رابطه مقادیری که از اندازه گیری با وسایل با دقت مختلف به دست آمده اند دارای تاثیر یکسانی روی برآورد مقدار واقعی دارند و این یک اشکال است .

به طور کلی می دانیم هر چه انحراف معیار یک وسیله اندازه گیری بالاتر باشد آن وسیله دارای دقت کمتری می باشد و اصطلاحا می گوییم که وزن اندازه گیری های انجام شده با آن وسیله کمتر می باشد . از همین جا می توان نتیجه گرفت که برای برآورد مقدار بهتری برای زاویه در این سوال لازم است از میانگین گیری وزن دار استفاده کنیم اما برای محاسبه وزن مشاهدات از روی انحراف معیار آن ها از رابطه زیر استفاده می کنیم :

$$P_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

طبق توضیحات داده شده کافی است تا ابتدا وزن مشاهدات را بدست آورده و نهایتا از طریق فرمول میانگین گیری وزن دار مقدار زاویه را برآورد کنیم .

سوال ۲ : چون در صورت سوال یک شرط آورده شده است این سوال را از روش شرط حل می کنیم . توضیحی که در اینجا لازم است آورده شود این است که به عنوان یک اصل

* همواره در صورتی می توانیم خطای اندازه گیری یک پارامتر را بررسی کنیم که اندازه گیری (مشاهدات) اضافه داشته باشیم .

در روش شرط به تعداد این اندازه گیری های اضافه درجه آزادی گفته می شود .

در این سوال اگر تنها ۲ تا از زوایای مثلث را اندازه گیری کرده بودیم می توانستیم مقدار زاویه سوم را با توجه به این که مجموع زوایای مثلث مقدار ثابتی است به دست آوریم اما زاویه سوم را هم قرائت کرده ایم و این نشان می دهد که یک اندازه گیری اضافی داریم . پس درجه آزادی ۱ می باشد و می توانیم یک معادله شرط بنویسیم .

در نوشتن یک معادله شرط باید توجه کرد که :

- ✓ در هر معادله شرط حداقل یک مشاهده داریم .
- ✓ هر مشاهده باید حداقل در یک معادله شرط باشد و این مورد با مورد قبلی یکی نیست .
- ✓ هرگز در یک معادله شرط نمی توان یک کمیت مجهول (کمیتی که نه مقدار واقعی و عاری از خطای آن را می دانیم و نه آن را اندازه گیری کرده ایم) وارد شود .

- ✓ در روش شرط هیچ مجهولی بدست نمی آید بلکه بهترین مقادیر ممکن به مشاهدات نسبت داده می شود .
- ✓ در معادلات شرط می توان هر تعداد و هر جا که لازم باشد مقادیر دقیق کمیت ها و ثوابت را وراد کنیم .
- ✓ فرم کلی معادلات شرط به فرم $f(l_1, l_2, \dots, l_n) = 0$ می باشد .

یعنی به طور کلی یک معادله شرط رابطه ای است بین کمیت هایی که اندازه گیری کرده ایم و کمیت هایی که مقادیر واقعی آن ها برای ما معلوم است .

در این سوال معادله شرط در صورت سوال داده شده است پس کافی است تا مراحل زیر را برای حل سوال انجام دهیم .

۱- تشکیل ماتریس B : (همواره ماتریس B ماتریسی است که از مشتق معادلات نسبت به مشاهدات بدست می آید و تعداد سطرها و ستون های آن به ترتیب برابر تعداد معادلات و مشاهدات می باشد .)

۲- تشکیل ماتریس وزن (P) : این ماتریس همواره یک ماتریس مربعی می باشد که در صورت استقلال مشاهدات از یکدیگر (مستقل بودن مشاهدات از یکدیگر به عنوان یک فرض همواره در سرشکنی مطرح می باشد .) درایه های قطر اصلی آن وزن تک تک مشاهدات و سایر درایه های آن صفر هستند .

۳- تشکیل ماتریس M از طریق رابطه ی زیر :

$$M = B * P^{-1} * B^T$$

۴- تشکیل ماتریس W : برای بدست آوردن ماتریس W در معادلات شرط تمامی جملات را به یک طرف تساوی آورده و سپس مقادیر مشاهدات را در معادله شرط جایگزین می کنیم . (همواره تعداد سطرهای ماتریس W برابر تعداد معادلات و تعداد ستون های آن برابر عدد ۱ می باشد .)

۵- تشکیل ماتریس K از طریق رابطه زیر :

$$K = M^{-1} * W$$

۶- تشکیل ماتریس V از طریق رابطه زیر :

$$V = -P^{-1} * B^T * K$$

۷- تشکیل ماتریس مشاهدات سرشکن شده از طریق رابطه زیر :

$$K_{CAP} = L + V$$

سوال ۳ : در این سوال میانگین وزن دار خواسته شده است که فرمول آن را در زیر بیان می کنیم . تنها نکته این سوال وزن مشاهدات می باشد که قبلا روش محاسبه آن را از روی انحراف معیار توضیح داده ایم .

$$L = \frac{\sum_{i=1}^{4}(P_i * l_i)}{\sum_{i=1}^{4} P_i}$$

در مورد محاسبه انحراف معیار میانگین وزن دار هم از قانون انتشار خطا استفاده می کنیم که تابع مورد استفاده همان تابع فوق می باشد . کافی است در تابع فوق نسبت به تمامی مشاهدات مشتق گرفته و سپس از فرمول قانون انتشار خطاهای تصادفی استفاده کنیم .

سوال ٤ : در این سوال باید از روش پارامتریک استفاده کنیم که این روش هم در واقع همان اصل کمترین مربعات می باشد که فرموله شده است . در نوشتن معادلات پارامتریک باید به نکات زیر توجه کرد :

- ✓ در این روش همواره تعداد معادلات برابرتعداد مشاهدات می باشد و این امر یک امتیاز برای این روش محسوب می شود .
- ✓ در هر معادله دقیقا یک مشاهده باید وجود داشته باشد . (نه بیشتر و نه کمتر) تعدا ثوابت و مقادیر بدون خطایی که در هر معادله مورد استفاده قرار می گیرد مانند روش شرط محدودیتی ندارد .
- ✓ در هر معادله باید حداقل یک پارامتر مجهول وجود داشته باشد . برای تعداد حداکثر مجهولات در هر معادله محدودیتی وجود ندارد .
- ✓ در حل معادلات به روش پارامتریک گاهی اوقات از روش مجهول معاون گیری استفاده می شود که این روش در جای خود بررسی خواهد شد .
- ✓ فرم کلی این معادلات به فرم $l = f(x)$ می باشد .

برای حل مسئله سرشکنی به روش پارامتریک باید مراحل زیر را انجام داد :

- ✓ تشکیل ماتریس A : این ماتریس همواره از مشتق معادلات نسبت به مجهولات به دست می آید . پس تعداد سطرهای آن همواره برابر تعداد معادلات و تعداد ستون های آن هم برابر تعداد مجهولات می باشد . در این سوال معادلات به فرم زیر می باشند :

$$l_1 = H_A - H_C$$
$$l_2 = H_B - H_A$$
$$l_3 = H_C - H_B$$
$$l_4 = H_D - H_B$$

- ✓ تشکیل ماتریس وزن (P) که همانند روش شرط می باشد .
- ✓ تشکیل ماتریس L که همان مقادیر اندازه گیری ها را نشان می دهد . (تعداد سطرها و ستون های این ماتریس به ترتیب برابر تعداد معادلات و ۱ می باشد .)
- ✓ ماتریس مجهولات در این روش از رابطه ی زیر بدست می آید .

$$X = (A^T * P * A)^{-1} * (A^T * P * L)$$

توجه :در این معادلات ارتفاع نقطه A مقدار ثابت و بدون خطای صفر معرفی شده است . پس از نوشتن معادلات پارامتریک لازم است که هر جا ارتفاع نقطه ی A وارد شد ، بجای آن مقدار ثابت صفر را قرار داده و این مقدار را به طرف چپ معادله منتقل کنیم . مثلا معادله نوشته شده برای مشاهده l_2 به فرم زیر می باشد :

$$l_2 = H_B - H_A \qquad l_2 = H_B - 0 \qquad l_2 + 0 = H_B \qquad \rightarrow \qquad l_2 = H_B$$

برای محاسبه انحراف معیار مجهولات نیز می توان ماتریس ماتریس واریانس کواریانس مجهولات را تشکیل دهیم . در این مثال چون ۳ مجهول داریم این ماتریس یک ماتریس مربعی از مرتبه ی ۳ خواهد بود که درایه های روی قطر اصلی آن به ترتیب واریانس مجهولات را به ما نشان می دهد و بقیه درایه ها کواریانس هستند . ترتیب واریانس ها در این ماتریس به همان ترتیبی است که در ماتریس A از مجهولات مشتق گرفته شده است . ماتریس واریانس واریانس مجهولات از رابطه زیر بدست می آید :

$$\sum\nolimits_x = (A^T * P * A)^{-1}$$

سوال ۵ :این سوال نیز شبیه به سوال قبلی می باشد و همان طور که در سوال ۴ ارتفاع نقطه A ثابت بود ، در این جا نیز ثقل در نقطه A ثابت می باشد . یکی از نکات این سوال نحوه محاسبه وزن مشاهدات می باشد که برای آن فرمولی در صورت سوال ارائه شده است و ما نیز در این جا به عنوان نمونه وزن مشاهده سوم را حساب می کنیم . وزن این مشاهده طبق رابطه ارائه شده در صورت سوال برابر است با :

$$P_3 = W_3 = \frac{1}{1.42}$$

نکته بعدی در این سوال درجه آزادی آن است که به طور کلی در این گونه سوالات روش کسر تعداد مجهولات از تعداد مشاهدات جوابگو می باشد . مثلا در این سوال ۸ مشاهده و ۴ مجهول داریم بنابراین تعداد معادلات شزط برابر ۴ تا می باشد . اما اکنون می خواهیم روش دیگری را برای تعیین درجه آزادی در این سوال توضیح دهیم . در شکل صفحه ۸۵ کتاب با توجه به معلوم بودن ثقل در نقطه A برای تعیین ثقل در نقاط دیگر از هر مسیری که حرکت کنیم **حداقل** به ۴ تا از مشاهدات (اختلاف ثقل ها) نیاز داریم . بنابراین بجز این ۴ تا بقیه ی مشاهدات اضافی هستند و در نتیجه درجه آزادی 8-4=4 است . از این مسیرها می توان مسیرهای AEDCB ، ABCDE ، AECBD را نام برد که در همه ی این مسیرها به ۴ اختلاف ثقل نیاز داریم و این تعداد حداقل تعداد مشاهدات مورد نیاز می باشد . در بالا اشاره کردیم که در روش شرط هیچ مجهولی محاسبه نمی شود ولی اکنون در قسمت اول این سوال از ما خواسته شده است که تعداد ۴ مجهول را به روش شرط محاسبه کنیم ، می خواهیم بررسی کنیم که این دو مورد که در ظاهر با هم تناقض دارند چگونه با یکدیگر سازگاری پیدا می کنند :

قبل از سرشکنی اگر بخواهیم می توانیم ثقل را در نقطه ی E با استفاده از مشاهده ی شماره ۷ و با توجه به معلوم بودن ثقل در نقطه ی A حساب کنیم . همچنین می توانیم ثقل را در این نقطه از روی مشاهدات شماره ۳ و ۶ و با توجه به معلوم بودن ثقل در نقطه ی A حساب کنیم . اگر اکنون ثقل در نقطه ی E را از این دو راه حساب کنیم دو عدد مختلف به دست می آید و این درست

نیست . منظور از سر شکنی به روش شرط و این که می گوییم در روش شرط مشاهدات سرشکن شده به دست می آیند این است که می خواهیم مقادیری برای مشاهدات به دست بیاوریم که محاسبه ثقل در هر نقطه مستقل از مسیر شود و در تمامی مسیرها به یک جواب واحد برسیم . پس از سرشکنی به روش شرط ، مقدار ثقل را در هر کدام از نقاط از هر مسیری هم که حساب کنیم جواب برای هر نقطه مقدار منحصر بفردی خواهد بود . اکنون معادلات شرط را به فرم زیر می نویسیم :

چون در هر حلقه اختلاف ثقل برابر صفر است ، معادلات به فرم زیر در می آیند :

$$\Delta g_7 - \Delta g_3 - \Delta g_6 = 0$$

$$\Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 = 0$$

$$\Delta g_8 - \Delta g_2 + \Delta g_4 = 0$$

$$\Delta g_8 - \Delta g_6 - \Delta g_5 = 0$$

اکنون ماتریس B (مشتق معادلات نسبت به مشاهدات) را تشکیل می دهیم .

Δg_1	Δg_2	Δg_3	Δg_4	Δg_5	Δg_6	Δg_7	Δg_8
0	0	-1	0	0	-1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0
0	-1	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	1-	-1	0	1

علامت مثبت و منفی را در معادلات برای هر جمله به این گونه تعیین می کنیم که یک جهت (ساعتگرد یا پادساعتگرد) را در حلقه مثبت فرض می کنیم . سپس هر بردار که در جهت مثبت باشد را مثبت فرض نموده و هر کدام را در جهت خلاف باشد منفی در نظر می گیریم . مابقی ماتریس ها را به علت سادگی تشکیل نمی دهیم .

در مورد قسمت ب اگر منظور از معادلات مشاهدات همان معادلات شرط باشد که باید بررسی کنیم ببینیم محاسبه ثقل برای نقاط مجهول مستقل از مسیر است یا خیر و اگر منظور معادلات پارامتریک باشد ، باید یکبار دیگر مجهولات را از این روش بدست آوریم و ببینیم سازگاری بین نتایج حاصل از دو روش وجود دارد یا نه .

نکته مهم : هیچ دلیلی بر اینکه نتایج حاصل از دو روش **دقیقا** یکی باشند وجود ندارد .

سوال ششم : در این سوال می خواهیم مفهوم مجهول معاون گیری در روش پارامتریک را که قبلا به آن اشاره کرده ایم ، شرح دهیم . می دانیم مجهول ما زاویه DOE می باشد . اما در سوال به جای این که زاویه DOE را به عنوان مجهول در نظر بگیریم ، مقادیر صحیح و سرشکن شده قرائت ها را روی هر امتداد مجهول در نظر می گیریم . یعنی قرائت امتداد های OA ، OB ، OC ، OD و OE را مجهول فرض می کنیم وپس از محاسبه آن ها به راحتی می توان با کسر قرائت امتداد OD از امتداد OE زاویه مجهول را بدست آورد . به این عمل مجهول معاون گیری گفته می شود . البته با توجه به این که در زوایا اختلاف قرائت ها مد نظر است ، بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود می توان مقدار قرائت را بر روی امتداد OA عدد ثابت صفر در نظر گرفت .

توجه : ممکن است این ابهام به وجود بیاید که تبدیل تنها مجهول مسئله به ۵ مجهول معاون خللی وارد می کند یا نه :

با توجه به این که از روش پارامتریک استفاده می کنیم تعداد معادلاتی که می نویسیم مستقل از تعداد مجهولات است و همواره به ازای هر مشاهده یک معادله داریم و می توان نتیجه گرفت که اضافه کردن مجهولات مشکل خاصی را بوجود نمی آورد .

اکنون با فرض این که قرائت روی امتداد OA برابر عدد ثابت صفر می باشد ، معادلات را تشکیل می دهیم :

$$L_1 = R_B - R_A = R_B - 0 = R_B$$

$$L_2 = R_C - R_A = R_C - 0 = R_C$$

$$L_3 = R_D - R_C$$

$$L_4 = R_D - R_B$$

$$L_5 = R_E - R_C$$

بنابراین ماتریس A یعنی ماتریس مشتق نسبت به مجهولات به فرم زیر در می آید :

R_B	R_C	R_D	R_E
1	0	0	0
0	1	0	0
0	-1	1	0
-1	0	1	0
0	-1	0	1

و ماتریس مشاهدات هم به فرم زیر می باشد .

درجه	دقیقه	ثانیه
30	15	15
50	37	51
15	31	17
35	54	00
45	31	18

در این سوال و سوالات مشابه آن که واحد تمامی اندازه گیری ها یکی می باشد ، (در این سوال همگی از جنس زاویه هستند) نیازی به تعویض واحد نداریم و ماتریس وزن را هم می توانیم به فرم زیر تشکیل دهیم .

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{matrix}$$

برای محاسبه انحراف معیار زاویه DOE پس از سرشکنی می توانیم ماتریس واریانس کواریانس مجهولات سرشکن شده را از طریق فرمول زیر محاسبه کنیم :

$$\sum_x = (A^T * P * A)^{-1}$$

پاسخ رابطه فوق یک ماتریس مربعی از مرتبه ۴ خواهد بود . (چون ۴ مجهول در سرشکنی داریم .) از طرفی می دانیم که در تشکیل ماتریس A ستون سوم و چهارم مربوط به قرائت های روی امتداد های OD و OE هستند . پس در ماتریس واریانس کواریانس مجهولات سرشکن شده درایه های سوم و چهارم روی قطر اصلی به ترتیب واریانس های قرائت روی این دو امتداد هستند . حال از روی این واریانس ها و با جذر گرفتن از آن ها به راحتی می توان انحراف معیار این قرائت ها را محاسبه کرد . از طرفی می دانیم :

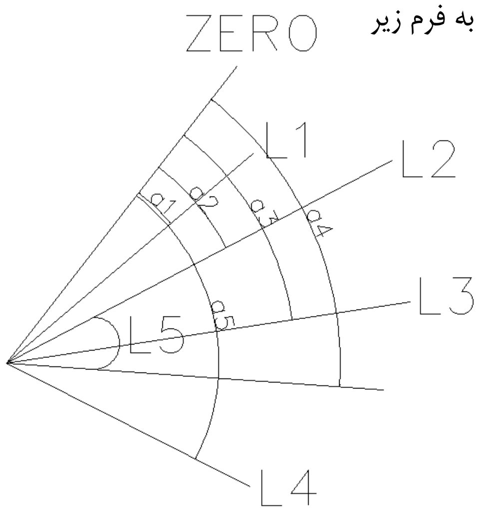
$$DOE = R_E - R_D$$

پس با توجه به معلوم بودن انحراف معیار قرائت های امتداد های OD و OE می توان انحراف معیار زاویه DOE را با استفاده از قانون انتشار خطا محاسبه کرد .

سوال هفتم : این سوال نیز مانند سوال قبلی می باشد با این تفاوت که ماتریس وزن آن ماتریسی واحد از مرتبه ۵ می باشد .

سوال هشتم :معادلات پارامتریک را در این سوال به دو فرم زیر می توان نوشت :

اگر مجهولات a1 تا a5 را به فرم روبرو انتخاب کنیم آنگاه معادلات پارامتریک به فرم زیر خواهند بود .



$$l_1 = a_1$$

$$l_2 = a_2$$

$$l_3 = a_3$$

$$l_4 = a_5$$

$$l_5 = a_4 - a_2$$

که مقادیر a کوچک مجهولات آن هستند و در این صورت نهایتا زاویه θ از کسر زاویه a4 از زاویه a5 به دست می آید .

و اگر مطابق شکل زیر پارامترهای b1 تا b5 را به عنوان مجهول در نظر بگیریم ، معادلات پارامتریک در این صورت عبارت اند از :

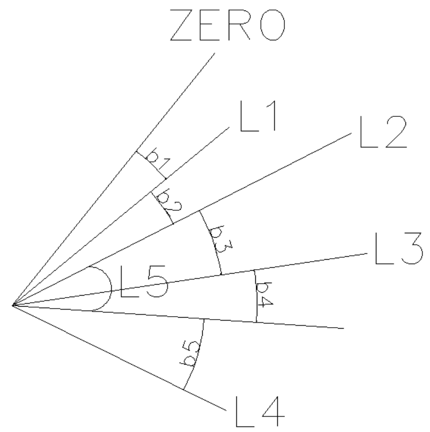
$$l_1 = b_1$$

$$l_2 = b_1 + b_2$$

$$l_3 = b_1 + b_2 + b_3$$

$$l_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$

$$l_5 = b_3 + b_4$$



سوال نهم : این سوال نمونه پارامتریک غیر خطی می باشد . تفاوت پارامتریک خطی و پارامتریک غیر خطی به طور کلی در این است که در روش غیر خطی ابتدا برای پارامتر مجهول یک مقدار تقریبی از روی محاسبات ساده و بدون سرشکنی به دست می آوریم . سپس مجهول سرشکنی ما در واقع مقادیر تصحیح لازم برای وارد کردن به مقدار اولیه می باشد . پارامتریک غیر خطی زمانی استفاده می شود که معادلات پارامتریک نسبت به مجهولات مسئله خطی نباشند . در این معادلات باید جای ماتریس L را نیز با ماتریس ΔL تعویض کنیم . مثلا فرض کنید که اولین معادله ما به فرم زیر باشد :

$$l_1 = \sin^{-1} x$$

در این معادله l_1 مشاهده و x مجهول می باشد و رابطه نسبت به مجهول یک رابطه خطی نیست . فرض کنید مقدار مشاهداتی برای l_1 برابر ۳۱ درجه باشد و مقدار اولیه برای x هم $\frac{1}{2}$ باشد . در این صورت مقدار که باید به جای l_1 قرار بگیرد به فرم زیر محاسبه می شود :

$$\Delta l_1 = l_1 - \sin^{-1} x_0 = 31 - 30 = 1\ degree$$

که در این رابطه x_0 مقدار اولیه برای x می باشد .

اکنون در این سوال تنها مجهول مولفه y نقطه ی P می باشد که با استفاده از ژیزمان معادلات آن را می نویسیم . در واقع می توان معادلات را به فرم زیر نوشت :

$$l_1 = G_{AB} - G_{AP}$$

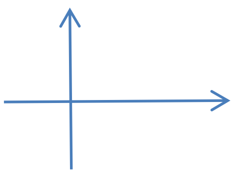
$$l_2 = G_{BC} - G_{BP}$$

اکنون باید ژیزمان ها را بر اساس پارامترهای مجهول بنویسیم :

برای نوشتن ژیزمان ها ابتدا آن ها را بر اساس زاویه حامل می نویسیم . زاویه حامل را با V نشان می دهیم .

$$V_{AB} = \tan^{-1}\left|\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right| = \tan^{-1}\frac{|x_B - x_A|}{|y_B - y_A|}$$

با توجه به شکل و اگر جهت محورهای مختصات را به فرم زیر **فرض کنیم :**



در مورد قدر مطلق صورت کسر در رابطه فوق چون طبق شکل و اعداد داده شده در مسئله $x_B = x_A$ ، می توانیم قدر مطلق را حذف کنیم و در مورد قدر مطلق مخرج هم چون واضح است که طبق سیستم مختصات فرضی و اعداد انتخاب شده $y_B < y_A$ ، پس می توانیم بجای قدرمطلق مخرج کسر آن را در یک منفی ضرب کنیم و در نتیجه معادله مربوط به زاویه حامل به فرم زیر در می آید :

$$V_{AB} = \tan^{-1}\left|\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right| = \tan^{-1}\frac{|x_B - x_A|}{|y_B - y_A|} = \tan^{-1}\frac{x_B - x_A}{y_A - y_B} \quad *$$

اکنون برای محاسبه ژیزمان می دانیم در صورتی که $\Delta x \geq 0$ و $\Delta y < 0$ باشد داریم :

$$G_{AB} = \pi - V_{AB}$$

پس به جای ژیزمان AB در رابطه ای که قبلا نوشتیم عبارت فوق را جایگزین می کنیم و در این عبارت نیز به جای V_{AB} از رابطه * جایگذاری می کنیم . سپس به جای مقادیر معلوم عدد قرار می دهیم و نهایتا معادلات به فرم زیر در می آیند :

$$l_1 = G_{AB} - G_{AP} = -\tan^{-1}\frac{x_B - x_A}{y_A - y_B} + \pi - (\tan^{-1}\frac{x_P - x_A}{y_P - y_A}) =$$

$$\pi - (\tan^{-1}\frac{x_B - x_A}{y_A - y_B} + \tan^{-1}\frac{x_P - x_A}{y_P - y_A})$$

$$l_2 = G_{BC} - G_{BP} = \tan^{-1}\frac{x_C - x_B}{y_C - y_B} - \tan^{-1}\frac{x_P - x_B}{y_P - y_B}$$

چون وزن مشاهدات یکسان می باشد ، می توان ماتریس P را از معادلات حذف کرد و یا آن رایک ماتریس مفرد از مرتبه ۲ در نظر گرفت . باید ماتریس ΔL را تشکیل دهیم که مانند ماتریس L در روش خطی می باشد . فقط کافی است در دو معادله فوق بجای مقادیر ثابت عدد قرار دهیم و تمامی جملات را به سمت چپ منتقل کنیم و بجای y_P هم که عدد آن را نمی دانیم همان طور که در صورت سوال گفته شده است ۲۹ را قرار می دهیم . توجه شود که گاهی لازم است این مقدار تقریبی را خودمان حساب کنیم . نهایتا ماتریس جواب یک ماتریس از مرتبه ۱ یعنی یک عدد خواهد شد . برای محاسبه مختصه y نقطه P باید این مقدار را مقدار تقریبی اولیه یعنی ۲۹ جمع کنیم . در مرحله بعدی اگر دقت بیشتری را مد نظر داشته باشیم باید این مقداری را که برای مختصه y نقطه P بدست آورده ایم به عنوان مقدار تقریبی در نظر بگیریم و مجددا مراحل را تکرار کنیم .

سوال دهم : در این سوال ابتدا معادلات را در حالت کلی می نویسیم :

$$l_1 = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$$

$$l_3 = G_{PB} - G_{PA} = \tan^{-1}\frac{x_B - x_P}{y_B - y_P} - \left(-\tan^{-1}\frac{x_P - x_A}{y_A - y_P} + 2\pi\right)$$

برای خطی کردن هم باید از بسط سری تیلور استفاده کنیم .

سوال یازدهم :

ابتدا روش پارامتریک را شرح می دهیم :

در این شکل واضح است که چون ۴ مشاهده داریم تعداد معادلات پارامتریک ۴ تا می باشد که برای مشاهدات l_1 و l_3 می توان از فرمول فاصله استفاده کرد و برای دو مشاهده دیگر نیز از فرمول ژیزمان و مطابق آنچه که قبلا شرح داده ایم . پس ماتریس ضرایب یک ماتریس 4*2 خواهد بود و ماتریس مشاهدات هم یک ماتریس 4*1 . تعداد مجهولات همان مختصات نقطه P می باشد که دو مولفه می باشد .

روش شرط :

این روش بخاطر مشکل تعیین درجه آزادی از روش پارامتریک پردردسرتر می باشد . هر چند در این جا نیز فرمول کسر تعداد مجهولات از مشاهدات جوابگو می باشد اما در این جا می خواهیم درجه آزادی را با ذکر دلایل دیگری تعیین کنیم :روشی که توصیه می شود این است که با فرض بدون خطا بودن تمامی مشاهدات مختصات نقطه P را تنها با یک مشاهده بدست بیاوریم . این کار امکان پذیر نمی باشد چرا که در مثلث تنها یک پارامتر معلوم (طول AB) داریم و اگر هر کدام از مشاهدات هم انتخاب شود نهایتا از ۶ پارامتر مثلث (۳ طول و ۳ زاویه) تنها ۲ پارامتر معلوم داریم و نمی توان سایر پارامتر ها را حساب کرد . اگر دو تا از مشاهدات را به کار ببریم این مشکل حل می شود یعنی تا اینجا نتیجه گرفته ایم که با استفاده از ۲ تا از مشاهدات و با توجه به معلوم بودن طول AB می توان سایر پارامترهای مثلث را بدست آورد . باید دقت کنیم که چون مجهولات ما مختصات ها هستند

آیا با این دو مشاهده امکان محاسبه آن ها نیز می باشد یا نه که این کار با استفاده از محاسبه ژیزمان ها امکان پذیر خواهد بود پس تعداد مشاهدات مورد نیاز ۲ تا می باشد و در نتیجه تعداد مشاهدات اضافی ۲ تا است .

برای نوشتن معادلات شرط هم یکبار زاویه A و طولهای l_3 ، l_1 و طول AB رابطه ی کسینوس ها را می نویسیم و بار دیگر هم اینکار را برای زاویه B به طریق مشابه می نویسیم . باید توجه نمود که تمامی مشاهدات حداقل در یک معادله ظاهر شوند و در معادلات شرط هیچ مجهولی وجود نداشته باشد . نکته دیگری که در این جا باید به آن اشاره کرد این است که هرگز معادلات شرط منحصر بفرد نیستند و ممکن است بتوان معادلات دیگری هم نوشت اما اگر بیش از ۲ معادله داشته باشیم بدون شک دترمینان ماتریس M صفر خواهد شد و درنتیجه نمی توانیم از آن معکوس بگیریم و امکان سرشکنی وجود نخواهد داشت .

معادلات را در زیر می نویسیم :

$$l_3 = \sqrt{AB^2 + l_1^2 - 2.AB.l_1.\cos l_2}$$

$$l_1 = \sqrt{AB^2 + l_3^2 - 2.AB.l_3.\cos l_4}$$

سوال دوازدهم : در این جا یکی از مطلوبات مسئله ماتریس واریانس کواریانس مشاهدات می باشد که به سادگی به دست می آید و در اینجا تنها نکته ی آن این است که باید انحراف معیار زوایا را به رادیان تبدیل کنیم :

$$5\ seconds \approx .00002424\ radians$$

اگر مقداری را که بر حسب رادیان بدست آوردیم a بنامیم ، ماتریس وزن مشاهدات به فرم زیر در می آید :

$$P = diag(\left[{}^{1}/_{a^2}, {}^{1}/_{a^2}, {}^{1}/_{a^2}, {}^{1}/_{.05^2}\right])$$

یعنی ماتریسی قطری که درایه های روی قطر اصلی آن به ترتیب نوشته شده اند . (سایر درایه های این ماتریس صفر می باشد .)

نکته دیگری که در این سوال باید به آن توجه شود این است که علاوه بر مجهولات خود مسئله که مختصات نقطه ی B می باشد باید مقدار طول نقطه C را نیز خودمان مجهول فرض کنیم . معادلات را برای زوایا با استفاده از ژیزمان و برای طول ها به کمک فرمول فاصله می نویسیم . بعد ماتریس ضرایب یعنی A برابر 3*4 می باشد و ماتریس مشاهدات یک ماتریس 1*4 است . برای محاسبه ماتریس واریانس کواریانس مجهولات نیز از فرمول $(A^T * P * A)^{-1}$ استفاده می کنیم که ماتریسی مربعی از مرتبه ۳ خواهد بود .

سوال سیزدهم : اولا چون برآورد کمترین مربعات مشاهدات خواسته شده است باید از روش شرط استفاده کنیم . ثانیا چون برای معین کردن یک مثلث به ۳ پارامتر نیاز داریم و در این جا ۶ مشاهده داریم پس درجه آزادی ۳ می باشد . اکنون معادلات شرط را می نویسیم :

$$L_4 + L_5 + L_6 - 180 = 0$$

$$\frac{L_2}{\sin L_4} = \frac{L_3}{\sin L_6} \rightarrow \frac{L_2}{\sin L_4} - \frac{L_3}{\sin L_6} = 0$$

$$L_1 = \sqrt{L_2^2 + L_3^2 - 2(L_2)(L_3).\cos L_5} \rightarrow L_1 - \sqrt{L_2^2 + L_3^2 - 2(L_2)(L_3).\cos L_5} = 0$$

معادلات شرط هیچ وقت منحصر بفرد نیستند یعنی می توان معادلات دیگری هم نوشت . همچنین باید توجه کرد که در صورتی که با این معادلات دترمینان ماتریس ضرایب صفر شود به معنی این است که معادلات مستقل نیستند و باید آن ها را تغییر داد . برای حل مسئله و برآورد مشاهدات سرشکن شده قبلا شیوه تشکیل ماتریس ها شرح داده شده است . برای محاسبه فاکتورواریانس ثانویه همان ماتریس V که در حل مسئله به روش شرط تشکیل می شود را در فرمول زیر قرار می دهیم :

اگر فاکتور واریانس ثانویه را با σ_2 نشان دهیم خواهیم داشت :

$$\sigma_2 = \frac{V^T * P * V}{df}$$

که در این رابطه P ماتریس وزن و df درجه آزادی می باشند . روش محاسبه ماتریس واریانس کواریانس مشاهدات هم قبلا شرح داده شده است .

سوال چهاردهم : ابتدا روش پارامتریک را شرح می دهیم :

برای نوشتن معادلات پارامتریک از همان معادلات ژیزمان که قبلا نحوه نوشتن آن ها توضیح داده شده است استفاده می کنیم و نهایتا معادلات به فرم زیر در می آیند:

$$L_1 = G_{AP} - G_{AB} = \pi - \tan^{-1}\frac{X_P - X_A}{Y_A - Y_P} - \tan^{-1}\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}$$

$$L_2 = G_{BA} - G_{BP} = \pi + \tan^{-1}\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} - \left(\pi - \tan^{-1}\frac{X_P - X_B}{Y_B - Y_P}\right) = \tan^{-1}\frac{X_P - X_B}{Y_B - Y_P} + \tan^{-1}\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}$$

$$L_3 = G_{BP} - G_{BC} = \pi - \tan^{-1}\frac{X_P - X_B}{Y_B - Y_P} - (\pi - \tan^{-1}\frac{X_C - X_B}{Y_B - Y_C}) = \tan^{-1}\frac{X_C - X_B}{Y_B - Y_C} - \tan^{-1}\frac{X_P - X_B}{Y_B - Y_P}$$

$$L_4 = G_{CB} - G_{CP} = 2\pi - \tan^{-1}\frac{X_C - X_B}{Y_B - Y_C} - (\pi + \tan^{-1}\frac{X_C - X_P}{Y_C - Y_P})$$
$$= \pi - (\tan^{-1}\frac{X_C - X_B}{Y_B - Y_C} + \tan^{-1}\frac{X_C - X_P}{Y_C - Y_P})$$

حال باید در این معادلات بجای مقادیر مختصات ۳ نقطه معلوم عدد گذاری کنیم و سپس در همه ی معادلات نسبت به مجهولات مختصاتی نقطه P مشتق بگیریم و نهایتا ماتریس ضرایب یک ماتریس 4*2 خواهد بود . در اینجا مسئله پارامتریک غیر خطی داریم و باید مقادیر اولیه مجهولات را نیز حساب کنیم و بجای ماتریس L نیز از ماتریس ΔL استفاده کنیم . قبلا هم گفته ایم که ماتریس ΔL چگونه محاسبه می شود . وقتی مجهولات مسئله را بدست آوردیم این مجهولات در واقع تصحیحاتی هستند که باید به مقادیر اولیه مجهولات اضافه شوند و مقادیر جدید دوباره به عنوان مقادیر اولیه مرحله بعدی انتخاب شوند و کار تکرار شود . تکرار تا جایی ادامه می یابد که به دقت دلخواهمان رسیده باشیم یا به عبارتی تصحیحات ما به اندازه ای که می خواهیم کوچک شده باشند .

روش شرط :اولین و مهمترین مسئله در روش شرط بررسی درجه آزادی می باشد که اکنون آن را بررسی می کنیم :

فرض کنیم تنها دو مشاهده L_1 و L_2 را به عنوان داشته باشیم . در این صورت در مثلث سمت چپ یک حالت تقاطع بدست می آید (با توجه به معلوم بودن مختصات نقاط A و B) و مختصات نقطه P قابل محاسبه خواهد بود . پس چون ۴ مشاهده داریم و با ۲ مشاهده مسئله قابل حل است درجه آزادی حداقل ۲ می باشد . آیا می توان با یک مشاهده هم مسئله را حل کرد یعنی درجه آزادی می تواند ۳ باشد یا نه که این کار شدنی نیست و در نتیجه درجه آزادی ۲ می باشد .

نوشتن معادلات :

معادله اول :

اگر زاویه APB را P_1 بنامیم و زاویه BPC را P_2 بنامیم آنگاه :

در مثلث ABP :

$$\frac{BP}{\sin L_1} = \frac{AB}{\sin P_1} \rightarrow \frac{BP}{\sin L_1} = \frac{AB}{\sin(\pi - (L_1 + L_2))} \rightarrow \frac{BP}{\sin L_1} = \frac{AB}{\sin(L_1 + L_2)} \quad (1)$$

و در مثلث BPC :

$$\frac{BP}{\sin L_4} = \frac{BC}{\sin P_2} \rightarrow \frac{BP}{\sin L_4} = \frac{BC}{\sin(\pi - (L_3 + L_4))} \rightarrow \frac{BP}{\sin L_4} = \frac{BC}{\sin(L_3 + L_4)} \quad (2)$$

اگر رابطه ۱ را بر رابطه ۲ تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{\sin L_4}{\sin L_1} = \frac{AB.\sin(L_3 + L_4)}{BC.\sin(L_1 + L_2)} \rightarrow \frac{\sin L_4}{\sin L_1} - \frac{AB.\sin(L_3 + L_4)}{BC.\sin(L_1 + L_2)} = 0$$

در این معادله با توجه به معلوم بودن مختصات نقاط A ، B و C تنها مشاهدات و معلومات دیده می شوند و در نتیجه می تواند یک معادله شرط باشد .

معادله دوم :

برای نوشتن معادله دوم مثلث ABC را در نظر می گیریم و در آن رابطه کسینوس ها را به فرم زیر می نویسیم :

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2.(AB).(BC).\cos(L_2 + L_3)} \rightarrow$$

$$AC - \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2.(AB).(BC).\cos(L_2 + L_3)} = 0$$

در این رابطه باید ابتدا فواصل AB ، AC و BC را از روی مختصات آن ها حساب کرده باشیم .

سوال پانزدهم :

در این سوال ۶ مشاهده داریم پس تعداد معادلات پارامتریک ۶ تا می باشد . همچنین تعداد مجهولات ۵ تا می باشد . یعنی مختصات x و y نقاط ۳ و ۴ و مختصه x نقطه ۲ . بنابراین ماتریس ضرایب یک ماتریس ۵*۶ می باشد و چون انحراف معیار و یا وزن برای مشاهدات تعریف نشده است می توان ماتریس وزن را ماتریس واحد از مرتبه تعداد مشاهدات گرفت و یا آن را کاملا از معادلات حذف کرد . اکنون معادلات را می نویسیم :

$$l_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$l_3 = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}$$

$$l_4 = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2}$$

$$l_5 = \sqrt{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2}$$

$$l_6 = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

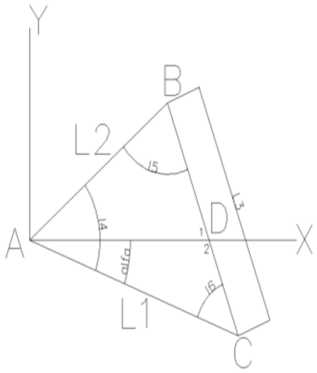
در این معادلات هم باید به جای مقادیر معلوم ، مقدار عددی آن ها را قرار دهیم .

بقیه روند کار در سوالات قبلی شرح داده شده است .

سوال شانزدهم :

الف :

تعیین درجه آزادی : همانطور که قبلا هم گفتیم در روش شرط برای تعیین درجه آزادی باید سعی کنیم کمترین تعداد مشاهدات ممکن برای حل مسئله را پیدا کنیم تا مابقی مشاهدات به عنوان درجه آزادی تلقی شوند . در این سوال زاویه A معلوم می باشد یعنی مقدار دقیق آن را می دانیم . حال اگر تنها مشاهدات l_2 و l_5 را داشته باشیم مثلث ABC برای ما معلوم می شود . یعنی در این مثلث تمامی پارامترهای دیگر را می توان محاسبه کرد . اما باید ببینیم که مجهول اصلی مسئله یعنی مختصات نقاط B و C را نیز می توان حساب کرد یا نه ؟اگر تمامی پارامتر های مثلث ABC معلوم باشد می توانیم روابط زیر را در مثلث های ABD و ACD بنویسیم :



$$ABD \text{ مثلث: } \frac{\sin l_5}{AD} = \frac{\sin D_1}{l_2}$$

$$ACD \text{ مثلث: } \frac{\sin l_6}{AD} = \frac{\sin D_2}{l_1}$$

اگر این دو رابطه را بر هم تقسیم کنیم AD ها حذف می شوند و دو پارامتر مجهول خواهیم داشت که عبارت اند از D_1 و D_2 . از طرفی می دانیم مجموع این دو زاویه ۱۸۰ درجه می باشد و در نتیجه می توان این دو زاویه را بدست آورد . اکنون در هر یک از مثلث های کوچک هم ۳ پارامتر معلوم داریم و می توانیم مختصات ها را حساب کنیم .پس تا اینجا ثابت کردیم که تنها با ۲ مشاهده این مسئله قابل حل می باشد و در نتیجه درجه آزادی برابر ۴ می باشد . توجه کنیم که اگر می خواستیم از فرمول کسر تعداد مجهولات از مشاهدات استفاده کنیم درجه آزادی ۲ بدست می آمد (6-4=2) که درست نیست .

نوشتن معادلات و حل مسئله :

$$l_4 + l_5 + l_6 = 180\,°$$

$$l_3 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2 * l_1 . l_2 . \cos l_4}$$

همچنین چون مقدار دقیق زاویه A را می دانیم یکی از معادلات می تواند به فرم زیر باشد :

$$l_4 = A$$

بقیه روند کار را به دلیل سادگی توضیح نمی دهیم .

ب:

تعیین درجه آزادی : در حالت قبلی درجه آزادی را ۴ معرفی کردیم و گفتیم که حداقل به ۲ مشاهده نیاز داریم . اگر زاویه آلفا مشاهده شود و تنها مشاهده ما باشد و زاویه A هم مثل حالت قبلی معلوم باشد با این اطلاعات مسئله قابل حل نمی باشدو نمی توان مختصات ها را حساب کرد و مجبوریم علاوه بر زاویه آلفا حداقل دو مشاهده دیگر داشته باشیم یعنی هر چند یک مشاهده اضافه شده است اما درجه آزادی تغییر نمی کند و تنها تفاوتی که ایجاد می شود این است که می توان فرم معادلات را عوض کرد و به گونه ی دیگری نوشت . توجه شود که منظور از این که نمی توان معادله دیگری اضافه کرد این است که در این صورت دترمینان ماتریس B در روش شرط صفر می شود و معادلات مستقل نخواهند بود .

ج :

با روشی که مسئله را حل کردیم اگر زاویه آلفا مجهول باشد تغییری در آن به وجود نمی آید و به همان نتیجه قبلی خواهیم رسید .

سوال هفدهم :

الف : در روش شرط باید ابتدا درجه آزادی را تعیین کنیم :

فرض کنیم مشاهدات l_1 ، l_2 ، l_4 و l_5 را انجام نداده باشیم . آیا می توان مختصات نقطه R را حساب کرد یا خیر ؟ برای این کار کافی است تا از روی مختصات نقاط S و Q ژیزمان SQ را حساب کنیم . سپس با توجه به زاویه l_3 ژیزمان SR را حساب کنیم و با توجه به اینکه طول l_6 را قرائت کرده ایم اختلاف طول و اختلاف عرض بین نقاط S و Q بدست می آید . حال چون مختصات S معلوم است مختصات نقطه R به دست می آید و در نتیجه ۴ مشاهده اضافی داریم و درجه آزادی برابر ۴ می باشد . روش دیگر برای توجیه عدد آزادی این است که در مثلث QRS طول SQ معلوم می باشد . اگر مثلا طول l_5 زاویه l_2 را قرائت کنیم تمامی پارامترهای مثلث به دست می آید و برای محاسبه ژیزمان هم چون یک ژیزمان معلوم در مسئله داریم مشکلی به وجود نمی آید و در نتیجه مابقی مشاهدات برای افزایش درجه آزادی هستند .

اکنون معادلات شرط را می نویسیم :

$$l_1 + l_2 + l_3 = 180\,°$$

$$G_{SQ} = l_3 + l_4$$

که در این معادله باید G_{SQ} را از روی مختصات حساب کنیم و عدد دقیق آن را قرار دهیم .

$$\frac{\sin l_3}{l_5} = \frac{\sin l_1}{l_6}$$

$$SQ = \sqrt{l_5^2 + l_6^2 - 2 * l_5 . l_6 . \cos l_2}$$

در این رابطه هم باید طول SQ را از روی مختصات محاسبه کرده و عدد دقیق آن را قرار دهیم . در اینجا هم از تشریح ادامه کار به دلیل سادگی و تکراری بودن خودداری می کنیم .

نکته :اگر بجای مختصات نقاط S و Q مختصات یکی از نقاط معلوم بود و طول SQ را هم به عنوان مقداری معلوم و بدون خطا داشتیم برای محاسبه ی آزیموت مجبور بودیم از مشاهده l_4 استفاده کنیم و در نتیجه یک درجه آزادی کمتر داشتیم .

روش پارامتریک :در این روش هم باید از معادلات ژیزمان و طول استفاده کرد که قبلا آن ها را شرح داده ایم و در اینجا دیگر معادلات را نمی نویسیم بجز معادله مربوط به مشاهده l_4 که قبلا نمونه آن را نداشته ایم . برای این مشاهده نیز چون مطابق شکل این زاویه دقیقا برابر ژیزمان SR است می توان معادله زیر را نوشت :

$$l_4 = 2\pi - \tan^{-1}\frac{x_S - x_R}{y_R - y_S}$$

سوال هجدهم : در این سوال معادلات پارامتریک را به فرم زیر می باشند :

$$\alpha_1 = G_{BC} - G_{BA} = 2\pi - \tan^{-1}\frac{x_B - x_C}{y_C - y_B} - G_{BA}$$

$$\alpha_2 = G_{CD} - G_{CB} = \pi + \tan^{-1}\frac{x_C - x_D}{y_C - y_D} - \left(\pi - \tan^{-1}\frac{x_B - x_C}{y_C - y_B}\right)$$
$$= \tan^{-1}\frac{x_C - x_D}{y_C - y_D} + \tan^{-1}\frac{x_B - x_C}{y_C - y_B}$$

$$\alpha_3 = G_{DE} - G_{DC} = 2\pi - \tan^{-1}\frac{x_D - x_E}{y_E - y_D} - \tan^{-1}\frac{x_C - x_D}{y_C - y_D}$$

$$\alpha_4 = G_{EF} - G_{ED} = G_{EF} - (\pi - \tan^{-1}\frac{x_D - x_E}{y_E - y_D})$$

$$d_1 = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$$

$$d_3 = \sqrt{(x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2}$$

اکنون باید به جای پارامترهایی که مقدار دقیق آن ها را می دانیم عدد قرار دهیم :

$$\alpha_1 = 2\pi - \tan^{-1}\frac{x_B - x_C}{y_C - y_B} - G_{BA} = 2\pi - \tan^{-1}\frac{9478.159 - x_C}{y_C - 2483.836} - 68°15'.7"$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}\frac{x_C - x_D}{y_C - y_D} + \tan^{-1}\frac{x_B - x_C}{y_C - y_B}$$

$$\alpha_3 = 2\pi - \tan^{-1}\frac{x_D - x_E}{y_E - y_D} - \tan^{-1}\frac{x_C - x_D}{y_C - y_D}$$
$$= 2\pi - \tan^{-1}\frac{x_D - 7709.336}{2263.411 - y_D} - \tan^{-1}\frac{x_C - x_D}{y_C - y_D}$$

$$\alpha_4 = G_{EF} - \left(\pi - \tan^{-1}\frac{x_D - x_E}{y_E - y_D}\right) = 300°11'30.5" + \tan^{-1}\frac{x_D - 7709.336}{2263.411 - y_D} - \pi$$

$$d_1 = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{(9478.159 - x_C)^2 + (2483.836 - y_C)^{\frac{1}{2}}}$$

$$d_2 = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^{\frac{1}{2}}}$$

$$d_3 = \sqrt{(x_D - 7709.336)^2 + (y_D - 2263.411)^{\frac{1}{2}}}$$

و فرم نهایی معادلات به صورت زیر است (در واقع معادلات را ساده می کنیم) :

$$\alpha_1 - 2\pi + 68°15'20.7" = -\tan^{-1}\frac{9478.159 - x_C}{y_C - 2483.836}$$

$$\alpha_3 - 2\pi = -\tan^{-1}\frac{x_D - 7709.336}{2263.411 - y_D} - \tan^{-1}\frac{x_C - x_D}{y_C - y_D}$$

$$\alpha_4 - 300°11'30.5" + \pi = \tan^{-1}\frac{x_D - 7709.336}{2263.411 - y_D}$$

فرم معادلاتی که مجددا نوشته نشده اند تغییری ندارند و ساده نمی شوند . گفتنی است این ساده کردن الزامی است چون قبلا گفتیم در مدل پارامتریک باید مقادیر ثابت و بدون خطا به سمت چپ معادله بروند ودر کنار مشاهدات قرار بگیرند .

توجه شود که شکل این سوال دارای مشکل می باشد . با توجه به توضیحاتی که در رابطه با نوشتن معادلات زاویه بر حسب ژیزمان دادیم باید موقعیت نسبی نقاط نسبت به هم به درستی معلوم باشد اما در این سوال این امر رعایت نشده است . مثلا به زاویه α_1 دقت کنید که طبق شکل باید بیش از ۱۸۰ درجه باشد ولی عددی که برای آن مشاهده شده است در حدود ۱۷۲ درجه

می باشد که اشتباه است . به عبارتی شاید بتوان گفت که اندازه گیری ها دارای خطای فاحش هستند . اگر این زاویه به درستی رسم شده بود مختصه y نقطه C کمتر از مختصه y نقطه B می شد و فرم معادلات تغییر می کرد .

حل مسئله در نرم افزار مطلب :

فایل حل این سوال با استفاده از نرم افزار *Matlab* بر روی وبلاگ نقشه برداری سیرجان به آدرس زیر قرار دارد .

com.blogfa.surveystars.www

سوال نوزدهم :

الف :

تعیین درجه آزادی : اگر مثلث بزرگ و یا هر یک از مثلث های کوچک را در نظر بگیریم برای تعیین طول x حداقل به یکی از ۳ مشاهده نیاز داریم و بنابراین درجه آزادی ۲ می باشد .

نوشتن معادلات :

$$\sin A = \frac{l_2}{l_1}$$

$$l_1 = l_3$$

بقیه روند کار و نوشتن ماتریس ها را به دلیل سادگی بیان نمی کنیم .

ب: در این حالت هم تنها نکته ای که شرح می دهیم ماتریس وزن می باشد که یک ماتریس قطری به فرم زیر می باشد :

$$P = diag\left(\left[{}^{1}/_{.005^2}, {}^{1}/_{.005^2}, {}^{1}/_{.005^2}\right]\right)$$

سوال بیستم :

الف :

تعیین درجه آزادی :مثل حالت های قبل ابتدا کمترین تعداد مشاهدات را ۱ در نظر می گیریم و بررسی می کنیم که آیا با یک مشاهده مسئله قابل حل می باشد یا خیر ؟

چون زاویه *BOX* ثابت و بدون خطا می باشد اگر بتوانیم پارامترهای مثلث ها را حساب کنیم با استفاده از این زاویه می توانیم ژیزمان را نیز محاسبه کنیم و مسئله حل می شود . مثلث *ABC* را در نظر بگیرید . در این مثلث ۲ زاویه معلوم داریم اگر تنها مشاهده ما یکی از طول های *AB* یا *BC* باشد مثلث *ABC* به طور کامل حل می شود و ژیزمان خط *AB* هم برابر ۴۵ درجه

خواهد بود . سپس ژیزمان خط AC برابر ۳۱۵ درجه می شود . اما چون مختصات نقطه A را نداریم نمی توانیم مختصات C را حساب کنیم . بنابراین با تک مشاهده مسئله حل نمی شود . ولی اگر مثلا طول OA هم مشاهده شود مسئله قابل حل است و لذا درجه آزادی برابر $4 - 2 = 2$ می شود .

نوشتن معادلات :

برای معادله اول از تصویر کردن طول های داده شده روی محور x استفاده می کنیم :

برای این کار لازم است ابتدا زاویه COA را که نام آن را O_1 در نظر می گیریم بر حسب مشاهدات بدست آوریم . هم چنین زاویه ACO را C_1 می نامیم . بنابراین در مثلث AOC داریم :

$$\frac{\sin C_1}{OA} = \frac{\sin 90°}{OC} \rightarrow \frac{\sin(90 - O_1)}{OA} = \frac{1}{OC} \rightarrow \frac{\cos O_1}{OA} = \frac{1}{OC} \rightarrow O_1 = \cos^{-1}\frac{OA}{OC}$$

$$OA.\cos 45° + AB.\cos 45° = OC.\cos(45° + \cos^{-1}\frac{OA}{OC}) + BC$$

در واقع می خواهیم بگوییم مجموع اضلاع OA و AB اگر روی محور X تصویر شود مقداری برابر با حالتی دارد که اضلاع OC و BC را روی محور X تصویر کنیم . (از روی زوایای داده شده و با توجه به اینکه گفته شده است زوایا خطا ندارند می توان نتیجه گرفت که ضلع BC موازی محور X است و در نتیجه تصویر BC روی محور X خودش می شود .

معادله دوم را نیز می توان به فرم زیر نوشت :

$$BC.\cos 45° = AB$$

ب:معادلات پارامتریک : اولا فرض می کنیم $X_O = 0$ و $Y_O = 0$ و با این فرض کلیت مسئله حفظ می شود . ثانیا چون مختصات نقاط B و A را هم نداریم باید آن ها را هم در روش پارامتریک علاوه بر مختصات نقطه C مجهول در نظر بگیریم و به دست بیاوریم .

ج:

سوال بیست و یکم :

پارامتریک :در این سوال می توانیم مختصات یکی از ایستگاه ها را به طور دلخواه عددی ثابت و بدون خطا اختیار کنیم . مثلا ما نقطه C را انتخاب کرده و مختصات آن را برای سادگی (۰و۰) در نظر می گیریم . با این فرض معادلات پارامتریک به فرم زیر در می آیند :

$$\alpha_1 = G_{BA} - G_{BC} = 2\pi - \tan^{-1}\frac{x_B - x_A}{y_A - y_B} - (\pi + \tan^{-1}\frac{x_B - x_C}{y_B - y_C})$$

$$\alpha_2 = G_{CB} - G_{CA} = \tan^{-1}\frac{x_B - x_C}{y_B - y_C} - \tan^{-1}\frac{x_A - x_C}{y_A - y_C}$$

$$\alpha_3 = G_{AC} - G_{AB} = \pi + \tan^{-1}\frac{x_A - x_C}{y_A - y_C} - (\pi - \tan^{-1}\frac{x_B - x_A}{y_A - y_B})$$

$$l_1 = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$$

$$l_2 = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

در این معادلات مجهولات مختصات نقاط A و B می باشد و می توانیم پس از محاسبه این کمیت ها با استفاده از روش های هندسی کمیت های h و x را بدست آوریم .

روش شرط :

در این روش هم باید چون باید پارامترهای مثلث مشخص شود لااقل به ۳ پارامتر نیاز داریم و با توجه به این که تعداد مشاهدات ۵ تا می باشد ، درجه آزادی عدد ۲ می شود :

نوشتن معادلات شرط :

یکی از معادلات را به استفاده از زوایای α_1 ، α_2 و α_3 می نویسیم :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180°$$

برای نوشتن معادله دوم ابتدا طول x را بر حسب مشاهدات می نویسیم :

در این روابط h پاره خطی است که از نقطه A بر BC عمود می شود .

$$\sin C = \frac{h}{l_2} \rightarrow h = l_2 . \sin C$$

$$\sin B = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\sin B} \rightarrow x = \frac{l_2 . \sin C}{\sin B}$$

اکنون معادله را می نویسیم :

$$l_2 . \cos\alpha_2 + x . \cos\alpha_1 = l_1 \rightarrow l_2 . \cos\alpha_2 + \frac{l_2 . \sin C}{\sin B}(\cos\alpha_1) = l_1$$

پس از سرشکنی مشاهدات در روش شرط مجددا با روابط هندسی کمیت های مجهول به دست می آید .

سوال بیست و دوم :در این سوال هم از روش مجهول معاون گیری استفاده می کنیم و مجهولات را قرائت روی امتداد ها در نظر می گیریم . همچنین بدون این که از کلیت مسئله کاسته شود مقدار قرائت را روی امتداد OA عدد ثابتی در نظر می گیریم و برای راحتی کار عدد صفر را انتخاب می کنیم . با این توضیحات معادلات به فرم زیر در می آیند :

$$l_1 = R_B - R_A = R_B - 0 \rightarrow l_1 = R_B$$

$$l_2 = R_C - R_B$$

$$l_3 = R_C$$

$$l_4 = R_D - R_C$$

$$l_5 = R_E - R_D$$

$$l_6 = R_E - R_B$$

ماتریس A به فرم زیر در می آید:

R_B	R_C	R_D	R_E
1	0	0	0
1-	1	0	0
0	1	0	0
0	1-	1	0
0	0	1-	1
1-	0	0	1

بقیه روند کار را به دلیل سادگی توضیح نمی دهیم .

سوال بیست و سوم :

تعیین درجه آزادی :در این سوال اگر مثلا مقادیر a ، e ، d و c معلوم باشد می توان مابقی زوایا را به روش زیر بدست آورد .

پس با این ۴ مشاهده امکان محاسبه مجهولات می باشد و در نتیجه درجه آزادی حداقل ۲ است . ($6 - 4 = 2$) اما همانطور که گفتیم این حداقل درجه آزادی می باشد . باید ببینیم آیا با تعداد مشاهدات کمتر هم می توانیم مسئله را حل کنیم یا خیر ؟

استدلال اول : با توجه به این که چهار ضلعی یک چهار ضلعی دلخواه می باشد تنها معادلاتی که می توانیم بنویسیم همان معادلات مجموع زوایای هر مثلث می باشد . این معادلات هم واضح است که اگر برای دو مثلث کوچک نوشته شود ، آنگاه معادله ای که برای مثلث بزرگ می نویسیم مستقل از این دو نخواهد بود و در نتیجه درجه آزادی همان عدد ۲ می باشد .

استدلال دوم : گفتیم حداقل درجه آزادی ۲ می باشد اکنون فرض می کنیم که درجه آزادی مثلا ۳ باشد و معادلات را می نویسیم :

در مثلث سمت چپ :

$$a + (e - d) + b = 180°$$

در مثلث سمت راست :

$$f + (c - b) + d = 180°$$

در مثلث بزرگ

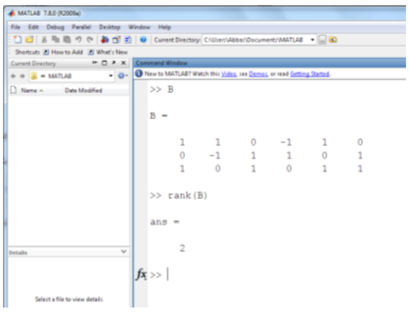
$$f + a + e + c = 360°$$

اکنون ماتریس ضرایب در روش شرط (B) را تشکیل می دهیم :

a	b	c	d	e	F
1	1	0	1-	1	0
0	1-	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1

حال اگر انحراف معیار ها را به رادیان تبدیل کرده و ماتریس وزن را محاسبه کنیم و با توجه به رابطه $M = B * P^{-1} * B^T$ ماتریس M را تشکیل دهیم ، دترمینان آن عدد $1.817930335 * 10^{-30}$ به دست می آید که تقریبا برابر صفر می باشد و بنابراین ماتریس M معکوس پذیر نیست ولی طبق فرمول ها ما به معکوس آن نیاز داریم و این تناقض است .

از طرفی اگر رنک ماتریس ضرایب را هم حساب کنیم عدد ۲ بدست می آید و این نشان دهنده عدم استقلال معادلات می باشد و هم چنین این که نهایتا دو معادله می توانیم داشته باشیم :



سوال بیست و چهارم :

ابتدا معادلات مربوط به فواصل را می نویسیم :

$$l_1 = ((x_2 - 1000)^2 + (y_2 - 2000)^2)^{1/2}$$

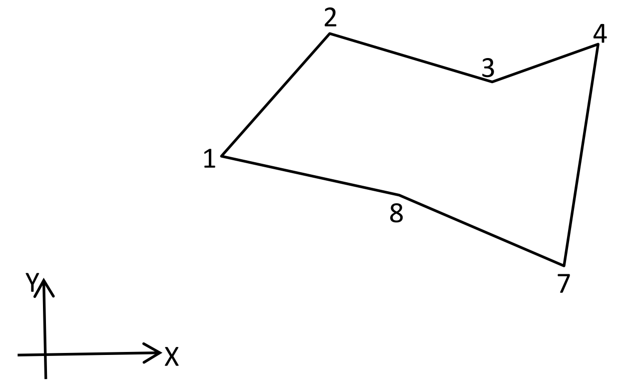
$$l_2 = ((x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2)^{1/2}$$

$$l_3 = ((x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2)^{1/2}$$

$$l_4 = ((x_7 - x_8)^2 + (y_7 - y_8)^2)^{1/2}$$

$$l_5 = ((1000 - x_8)^2 + (2000 - y_8)^2)^{1/2}$$

$$l_6 = ((x_4 - x_7)^2 + (y_4 - y_7)^2)^{1/2}$$



برا ی نوشتن معادلات ژیزمان مجبوریم شکل تقریبی مسئله را داشته باشیم که آن را با توجه به مختصات اولیه رسم کرده ایم . اگر سیستم مختصات فرضی را مطابق شکل نمایش داده شده در نظر بگیریم ، طبق مختصات اولیه باید مثلا طول نقطه 8 از طول نقطه 2 بیشتر باشد و از طول نقطه 3 کمتر باشد و واضح است که این امر در شکل رعایت شده است . یا مثلا عرض نقطه 8 باید از عرض نقطه 7 بیشتر باشد و از عرض نقطه 1 کمتر باشد .

نوشتن معادلات ژیزمان :

$$\alpha_1 = \pi - \tan^{-1}\frac{x_8 - 1000}{2000 - y_8} - \tan^{-1}\frac{x_3 - 1000}{y_3 - 2000}$$

$$\alpha_2 = \pi + \tan^{-1}\frac{x_2 - 1000}{y_2 - 2000} - \left(\pi - \tan^{-1}\frac{x_3 - x_2}{y_2 - y_3}\right)$$

بقیه معادلات ژیزمان نیز به همین فرم نوشته می شوند .